matesfacil

Teorema del coseno o de los cosenos

Contenido de esta página:

1. Introducción
2. Teorema del coseno (enunciado y demostración)
3. **6 Problemas resueltos** de aplicación del teorema del coseno

1. Introducción

El **teorema del coseno** (o **teorema de los cosenos**) es un resultado de **trigonometría** que establece la relación de proporcionalidad existente entre las longitudes de lados de un triángulo cualquiera con los cosenos de sus ángulos interiores opuestos. Este teorema es una generalización del teorema de Pitágoras (la razón de ello se encuentra en la **nota** del siguiente apartado).

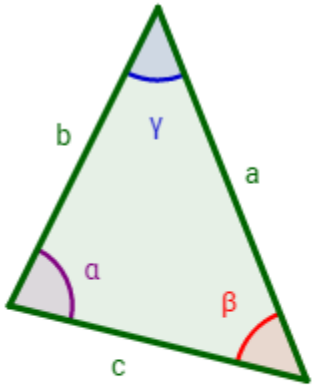
Para aplicar el teorema del coseno se necesita conocer la longitud de dos lados y la medida de un ángulo interior (opuesto al del otro lado).

En esta página enunciamos y demostramos el teorema del coseno y resolvemos problemas de su aplicación en los que se pregunta por algún lado o ángulo de un triángulo dado. En algunos de los problemas se necesitan otros resultados básicos como el teorema de Pitágoras y la propiedad de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

2. Teorema del coseno

Sea un triángulo cualquiera con lados a, b y c y con ángulos interiores α, β y γ (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente).

Entonces, se cumplen las relaciones



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

Nota: se dice que es una generalización de Pitágoras porque si uno de los ángulos es recto, el triángulo es rectángulo, siendo la hipotenusa el lado opuesto a dicho ángulo y se obtiene el teorema de Pitágoras al aplicar el del coseno.

Por ejemplo, si α = 90º, entonces, la primera de las tres fórmulas anteriores queda como

$$a^2 = b^2 + c^2$$

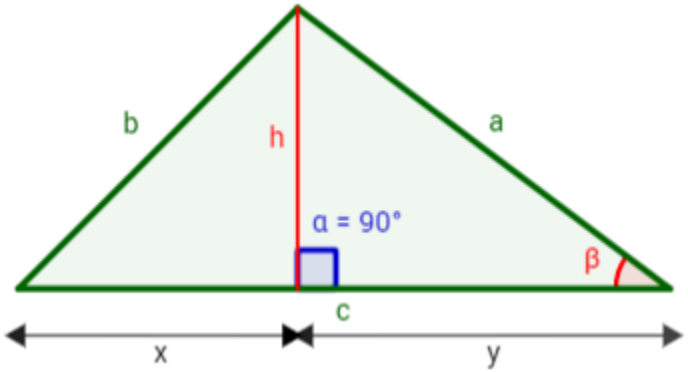
siendo a la hipotenusa del triángulo.

Ver demostración

Haremos la demostración por el teorema de Pitágoras, pero demostraremos únicamente la fórmula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)$$

para el caso en el que el lado b es adyacente a dos ángulos agudos (como en la imagen siguiente). En los otros casos, se procede de forma similar.



Hemos dividido el triángulo en dos triángulos rectángulos. Observemos que el lado c es

$$c = x + y$$

de donde

$$y = c - x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la izquierda, obtenemos la relación

$$b^2 = x^2 + h^2$$

y aplicando Pitágoras al triángulo de la derecha,

$$h^2 = a^2 - y^2$$

Escribimos en esta última relación y como c - x:

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

Sumamos las dos relaciones obtenidas:

$$\begin{array}{rl} & b^2 = x^2 + h^2 \\ + & h^2 = a^2 - (c - x)^2 \\ \hline & b^2 + h^2 = x^2 + h^2 + a^2 - (c - x)^2 \end{array}$$

Simplificamos la expresión:

$$b^2 = x^2 + a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 = x^2 + a^2 - (c^2 + x^2 - 2cx)$$

$$b^2 = x^2 + a^2 - c^2 - x^2 + 2cx$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

Finalmente, puesto que el triángulo de la derecha es rectángulo, por definición del coseno,

$$\cos(\beta) = \frac{y}{a} = \frac{c - x}{a}$$

Despejamos x:

$$x = c - a \cdot \cos(\beta)$$

Sustituimos esta x en la expresión que teníamos:

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx \rightarrow$$
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c(c - a \cdot \cos(\beta)) \rightarrow$$
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \rightarrow$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$$

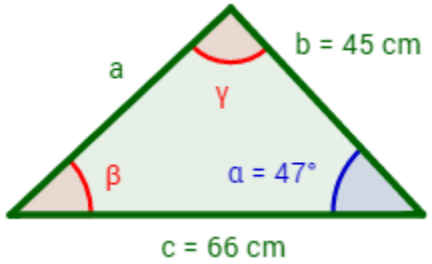
6 Problemas Resueltos

Notas previas:

- En el texto, escribiremos *coseno* de x como $cos(x)$.
- También utilizaremos la función arcocoseno escrita como $arccos$, que es la función inversa del coseno. Normalmente, en las calculadoras esta función se denota por cos^{-1}.

Problema 1

Se tiene un triángulo cuyos lados b y c miden 45 y 66 cm respectivamente y cuyo ángulo α mide 47°. Hallar cuánto mide el lado a del triángulo.



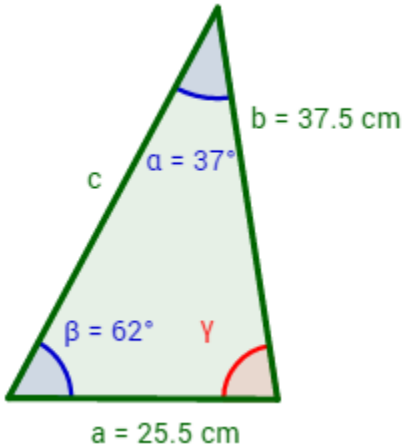
Ver Solución

Problema 2

Si cierto triángulo tiene un lado de 25.5 cm y otro de 37.5 cm y sus respectivos ángulos opuestos son de 37° y 62°, ¿cuánto mide el otro lado?

Ver Solución

El triángulo es el siguiente:



Para hallar el lado *c* aplicaremos la siguiente fórmula del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Pero para poder aplicarla, necesitamos conocer el ángulo γ. Esto no supone ningún problema ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°, por lo que tenemos la ecuación:

$$180° = \alpha + \beta + \gamma$$

$$180° = 37° + 62° + \gamma$$

$$\gamma = 180° - 37° - 62°$$

$$\gamma = 81°$$

Aplicamos la fórmula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$$

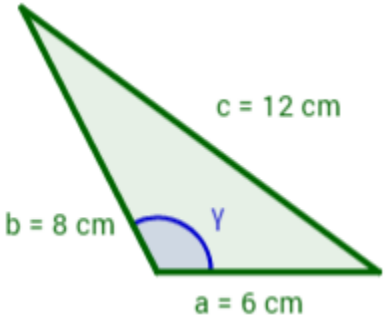
$$c = \sqrt{25.5^2 + 37.5^2 - 2 \cdot 25.5 \cdot 37.5 \cdot \cos(81°)}$$

$$c = 41.92\ cm$$

Luego el lado *c* mide 41.92 cm.

Problema 3

¿Cuál es el valor del ángulo γ del siguiente triángulo si se sabe que los lados *a*, *b* y *c* miden 6, 8 y 12 cm respectivamente?



Ver Solución

Para hallar el ángulo γ aplicaremos la siguiente fórmula del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Como conocemos todos los datos necesarios, los sustituimos en la fórmula y despejamos el ángulo γ aplicando la inversa *arccos*:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

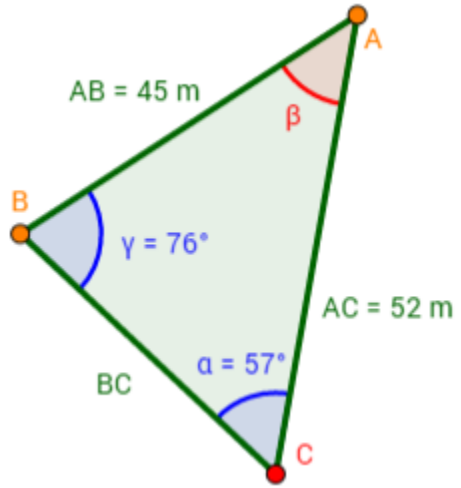
$$\gamma = \arccos\left(\frac{12^2 - 6^2 - 8^2}{-2 \cdot 6 \cdot 8}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{11}{24}\right)$$

$$\gamma = 117.28°$$

Problema 4

Carlos y Felipe deciden competir en carreras alrededor de un parque. El parque tiene forma de triángulo con vértices *A*, *B* y *C*, ángulos α = 57° y γ = 76º y lados *AC* = 52 m y *AB* = 45 m.



Carlos parte del vértice *A* y Felipe parte del vértice *B*. La meta para ambos es el vértice *C*, pero cada uno debe pasar por el vértice del cual partió el otro antes de dirigirse hacia *C*. Si los dos corren a la misma velocidad y salen al mismo tiempo, ¿cuál de los dos amigos ganará la competición?

Ver Solución

Carlos debe recorrer los lados *AB* y *BC* y Felipe, los lados *BA* y *AC*. Los lados *AB* y *BA* son el mismo lado, pero los escribimos así para indicar el sentido del movimiento.

Como ambos amigos corren a la misma velocidad y parten al mismo tiempo, ganará quien recorra el camino más corto. Por tanto, tenemos que calcular las distancias de cada recorrido.

Las distancias que deben recorrer ambos amigos son:

$$D_{Carlos} = AB + BC$$

$$D_{Felipe} = AB + AC$$

Para saber cuál es el camino más corto es suficiente conocer la longitud de los lados *BC* y *AC*.

El lado *AC* ya lo conocemos. Para calcular *BC*, aplicamos el teorema del coseno:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\beta)}$$

Necesitamos calcular el ángulo β:

$$180 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\beta = 180° - 57° - 76°$$

$$\beta = 47°$$

Sustituimos en la fórmula:

$$BC = \sqrt{52^2 + 45^2 - 2 \cdot 52 \cdot 45 \cdot \cos(47°)}$$

$$BC \cong 39.21\ m$$

Como el lado *BC* mide menos que el lado *AC*, Carlos ganará la competición.

Exactamente, las distancias de los trayectos son:

$$D_{Carlos} = 45 + 39.21 =$$

$$= 84.21\ m$$

$$D_{Felipe} = 45 + 52 =$$

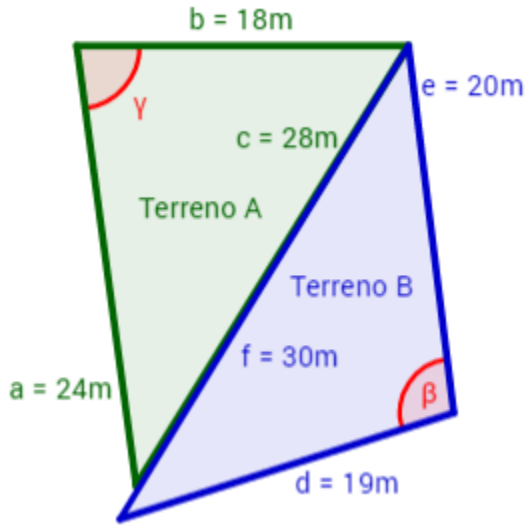
$$= 97\ m$$

Luego

$$D_{Carlos} < D_{Felipe}$$

Problema 5

Un labrador quiere comprar un terreno con forma triangular. Se le ofrecen dos terrenos colindantes: el terreno A y el terreno B. La longitud de las tres vallas que delimitan el terreno A son 18, 24 y 28 metros y las del terreno B son 19, 20 y 30 metros.



¿Qué terreno debe comprar el labrador si desea el de mayor área?

Ayuda: el teorema del seno establece que el área de un triángulo de lados a, b, c y ángulo γ opuesto al lado c es

$$Área = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$$

Ver Solución

Llamamos a, b y c a los lados del terreno A y d, e y f a los lados del terreno B.

Como conocemos la medida de todos los lados, para poder aplicar la fórmula del área es suficiente calcular un ángulo de cada triángulo. Para ello, aplicamos el teorema del coseno:

Para el terreno A:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{28^2 - 24^2 - 18^2}{-2 \cdot 18 \cdot 24}\right)$$

$$\gamma = 82.28°$$

Para el terreno *B*:

$$\beta = \arccos\left(\frac{f^2 - d^2 - e^2}{-2de}\right)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{30^2 - 19^2 - 20^2}{-2 \cdot 19 \cdot 20}\right)$$

$$\beta = 100.53°$$

Calculamos las áreas:

Calculamos el área del terreno *A* (A_{TA}):

$$A_{TA} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$$

$$A_{TA} = \frac{24 \cdot 18 \cdot \sin(82.28°)}{2}$$

$$A_{TA} = 214.04\ m^2$$

Calculamos el área del terreno *B* (A_{TB}):

$$A_{TB} = \frac{d \cdot e \cdot \sin(\beta)}{2}$$

$$A_{TB} = \frac{19 \cdot 20 \cdot \sin(100.53°)}{2}$$

$$A_{TB} = 186.80\ m^2$$

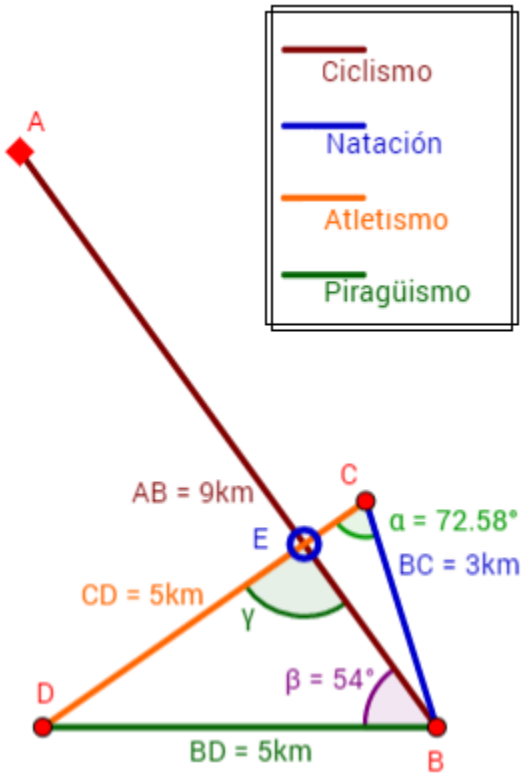
Por tanto, concluimos que el área del terreno *A* es mayor que la del terreno *B*:

$$A_{TA} > A_{TB}$$

El campesino debe comprar el terreno *A*.

Problema 6

El trayecto de un cuadriatlón (competición deportiva de cuatro disciplinas) está trazado entre cinco puntos (o vértices): *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.



El tramo *AB* son 9km de ciclismo, el tramo *BC* son 3km de natación, el tramo *CD* son 5km de atletismo y el tramo *BD* son 5km de piragüismo.

En el vértice *E* hay una parada para tomar agua, la distancia entre los vértices *C* y *E* es de 0.95km y los ángulos α y β miden 72.58° y 54° respectivamente.

Calcular:

a. Distancias *a* (tramo *EB*) y *b* (tramo *DE*).

b. Distancia del inicio a la parada a tomar agua (tramo *AE*).

c. Ángulo γ.

Ver Solución

Los datos que tenemos son:

$$AB = 9km$$

$$BC = 3km$$

$$CD = 5km$$

$$BD = 5km$$

$$CE = 0.95km$$

$$\alpha = 72.58°$$

$$\beta = 54°$$

Apartado *a*:

Podemos aplicar directamente el teorema del coseno para encontrar el lado *a*:

$$a = \sqrt{BC^2 + CE^2 - 2 \cdot BC \cdot CE \cdot \cos(\alpha)}$$

Sustituimos los datos:

$$a = \sqrt{3^2 + 0.95^2 - 2 \cdot 3 \cdot 0.95 \cdot \cos(72.58°)}$$

$$a = 2.86\ km$$

Habiendo obtenido *a*, contamos con todos los datos para calcular el lado *b*. Para ello, aplicamos de nuevo el teorema del coseno:

$$b = \sqrt{a^2 + BD^2 - 2 \cdot a \cdot BD \cdot \cos(\beta)}$$

Sustituimos valores y obtenemos:

$$b = \sqrt{2.86^2 + 5^2 - 2 \cdot 2.86 \cdot 5 \cdot \cos(54°)}$$

$$b = 4.05\ km$$

Luego la respuesta al apartado *a* es:

$$a = 2.86\ km$$

$$b = 4.05\ km$$

Apartado *b*:

Sabemos que la distancia que la distancia del tramo *AB* son 9km y que este tramo es la suma de dos tramos:

$$AB = AE + a$$

Despejamos *AE*:

$$AE = AB - a$$

$$AE = 9 - 2.86$$

Por tanto, la distancia del inicio a la parada es:

$$AE = 6.14\ km$$

Apartado c:

Finalmente, para calcular el ángulo γ podemos aplicar el teorema del coseno:

$$BD^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Despejamos γ aplicando *arcocoseno*:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{BD^2 - b^2 - a^2}{-2 \cdot b \cdot a}\right)$$

Sustituimos los valores:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{5^2 - 2.86^2 - 4.05^2}{-2 \cdot 2.86 \cdot 4.05}\right)$$

Luego el ángulo es, aproximadamente,

$$\gamma \cong 91.03°$$

Teorema del coseno o de los cosenos - (c) - matesfacil.com

Matesfacil.com by J. Llopis is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.