matesfacil

Teorema del seno o de los senos

Contenido de esta página:

1. Introducción
2. Teorema del seno (enunciado y demostración)
3. Área de un triángulo inscrito (aplicación del teorema del seno)
4. **7 Problemas resueltos** de aplicación del teorema del seno

1. Introducción

El **teorema del seno** (o **teorema de los senos**) es un resultado de **trigonometría** que establece la relación de proporcionalidad existente entre las longitudes de lados de un triángulo cualquiera con los senos de sus ángulos interiores opuestos. Esta relación fue descubierta en el siglo X.

Si se aplica el teorema a la fórmula del área de un triángulo (área igual a la mitad de la base por la altura) inscrito en una circunferencia de radio R, se obtiene una fórmula para el área en función de los lados y del radio (apartado 3).

Para aplicar el teorema del seno se necesita conocer dos lados y un ángulo interior (opuesto a alguno de estos dos lados), o bien, un lado y dos ángulos (uno de ellos debe ser el opuesto al lado).

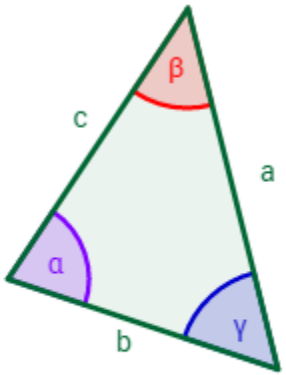
En esta página enunciamos y demostramos el teorema del seno y la fórmula del área mencionada anteriormente y resolvemos problemas de aplicación de éstos en los que se desea calcular algún lado, algún ángulo o el área de algún triángulo. En algunos de los

problemas se necesitan otros resultados básicos como el teorema de Pitágoras y la propiedad de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

2. Teorema del seno

Sea un triángulo cualquiera con lados a, b y c y con ángulos interiores α, β y γ (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente).

Entonces, se cumple la relación



$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

Además, se cumple

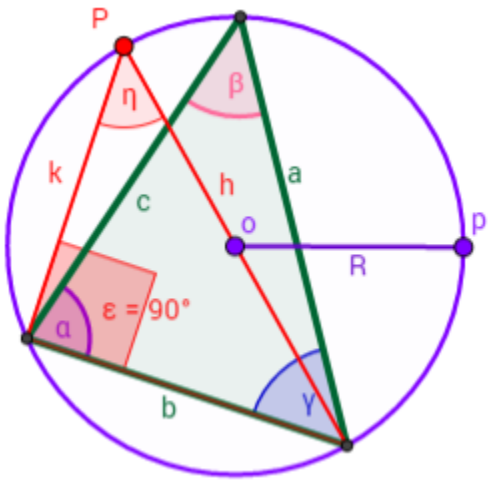
$$\frac{a}{sin(\alpha)} = D = 2R$$

Ver demostración

Representamos el triángulo circunscrito en una circunferencia de radio R (diámetro $D = 2R$) y de centro o.

Representamos otro triángulo de modo que:

- uno de sus lados coincide con uno de los lados del triángulo inicial, por ejemplo, el lado b.
- es un triángulo rectángulo, es decir, uno de sus ángulos mide 90º. Para dicho ángulo, nosotros hemos escogido el vértice donde está el ángulo α.



El triángulo tiene otros dos lados: k y h. El lado h es su hipotenusa y puesto que pasa por el centro de la circunferencia, mide exactamente lo mismo que el diámetro:

$$h = D = 2 \cdot R$$

Se cumple que los ángulos η y β son iguales y, por tanto, también lo son sus senos:

$$sin(\eta) = sin(\beta)$$

Y como el nuevo triángulo es rectángulo,

$$sin(\beta) = sin(\eta) = \frac{b}{h}$$

Luego

$$h = \frac{b}{sin(\beta)}$$

Como $h = D = 2R$,

$$2R = \frac{b}{sin(\beta)}$$

De forma similar, se obtienen las relaciones

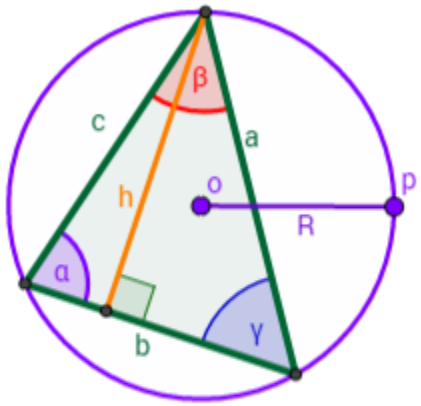
$$2R = \frac{a}{sin(\alpha)}$$

$$2R = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

de donde se concluye el teorema.

3. Área de un triángulo inscrito

Si consideramos el triángulo inscrito en una circunferencia (de radio R y diámetro $D = 2 \cdot R$), entonces:



$$\acute{A}rea = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

Ver demostración

Recordamos que el área de un triángulo base b y altura h es

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Atendiendo a la representación anterior, el seno del ángulo γ es

$$sin(\gamma) = \frac{h}{a}$$

Por tanto, podemos escribir la altura, h, como

$$h = a \cdot sin(\gamma)$$

Sustituimos esta altura en la fórmula del área:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot sin(\gamma)}{2}$$

Según el teorema del seno,

$$\frac{c}{sin(\gamma)} = D = 2R$$

Luego,

$$sin(\gamma) = \frac{c}{2R}$$

Por tanto, la expresión del área queda como

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

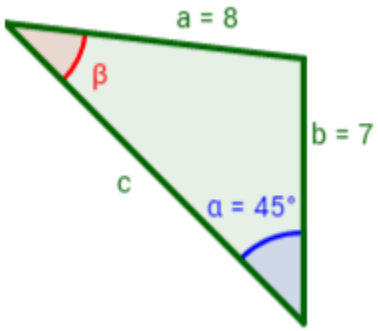
7 Problemas Resueltos

Notas previas:

- En el texto, escribiremos *seno* de x como $sin(x)$, aunque en otros textos lo encontraremos como $sen(x)$, $seno(x)$ o $sinus(x)$.
- También utilizaremos la función arcoseno escrita como $arcsin$, que es la función inversa del seno. Normalmente, en las calculadoras esta función se denota por sin^{-1}.

Problema 1

En el siguiente triángulo de lados a = 8cm y b = 7cm. Calcular cuánto mide el ángulo β sabiendo que el ángulo γ mide 45º.



Ver Solución

Como conocemos los lados a y b y el ángulo α, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)}$$

Por tanto,

$$\frac{8}{sin(45°)} = \frac{7}{sin(\beta)}$$

Despejamos el seno de β:

$$sin(\beta) = \frac{7 \cdot sin(45°)}{8} =$$

$$= \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{16}$$

Finalmente, despejamos β utilizando la inversa del seno (arcoseno):

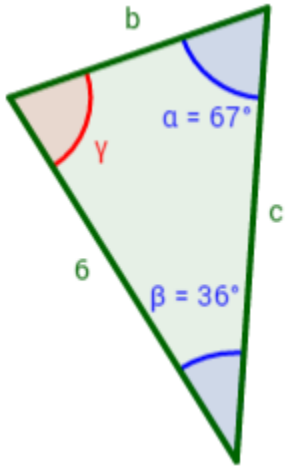
$$\beta = \arcsin\left(\frac{7\sqrt{2}}{16}\right) = 38.22°$$

Luego el ángulo es

$$\beta = 38.22°$$

Problema 2

Se tiene un triángulo con ángulos $\alpha = 67°$ y $\beta = 36°$ y un lado $a = 6$cm. ¿Cuánto mide el lado c?



Ver Solución

Para calcular el lado *c* necesitamos conocer el ángulo γ.

Recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°, es decir, tenemos la ecuación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Despejamos el ángulo γ:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Sustituimos los valores:

$$\gamma = 180° - 67° - 36°$$

$$\gamma = 77°$$

Luego el ángulo es γ = 77º.

Ahora podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

Sustituimos los datos:

$$\frac{c}{\sin(77°)} = \frac{6}{\sin(67°)}$$

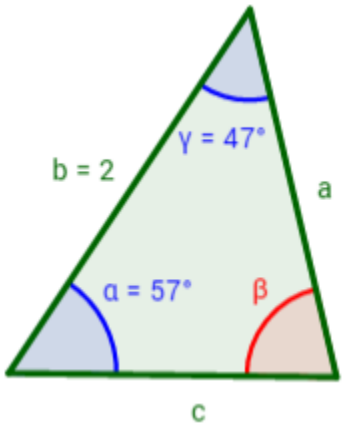
Por tanto,

$$c = \frac{6 \cdot \sin(77°)}{\sin(67°)} \cong 6.35\ cm$$

Luego el lado *c* mide 6.35 cm.

Problema 3

En el siguiente triángulo con lado *b* = 2cm y ángulos α = 57° y γ = 47°, ¿cuánto mide el lado *a*?



Ver Solución

Por el teorema del seno,

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Sustituimos en dicha relación los datos proporcionados:

$$\frac{a}{\sin(57°)} = \frac{2}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(47°)}$$

Tal como están escritas las relaciones, no podemos calcular el lado *a* porque nos faltan datos. Pero como la suma de los ángulos debe ser 180º, podemos calcular el ángulo β:

$$\beta = 180° - 57° - 47°$$
$$\beta = 76°$$

Ahora ya podemos obtener el lado *a*:

$$\frac{a}{\sin(57°)} = \frac{2}{\sin(76°)}$$

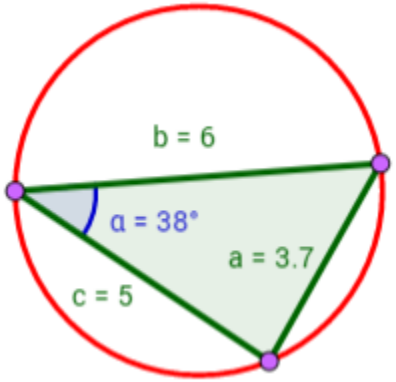
De donde

$$a = \sin(57°) \cdot \frac{2}{\sin(76°)}$$
$$a \cong 1.73$$

Luego el lado *a* mide 1.73 cm.

Problema 4

Calcular el radio y el diámetro de la circunferencia sobre el que está inscrito el siguiente triángulo conociendo el único ángulo $\alpha = 38°$.



Ver Solución

El teorema del seno nos proporciona el diámetro de la circunferencia:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = D$$

Los valores de los lados b y de c y de sus respectivos ángulos opuestos β y α no son necesarios a la hora de calcular el diámetro ya que podemos servirnos únicamente de la relación

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = D$$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$\frac{3}{\sin(38°)} = D$$

Por tanto, el diámetro de la circunferencia es

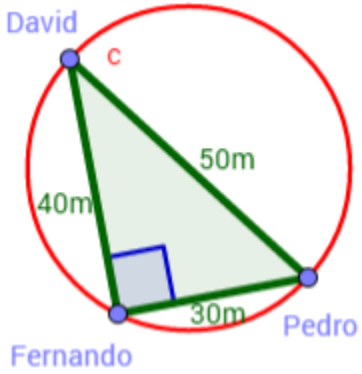
$$D = 4.8728\ cm$$

Problema 5

En un vecindario con forma circular, viven David, Pedro y Fernando. Sus casas están en las orillas de la vecindad. Sabemos que entre la casa de David y la de Pedro hay 50 metros, entre la casa de Pedro y Fernando hay 30 metros y entre la casa de Fernando y la de David hay 40 metros. ¿Cuál es el diámetro de la vecindad donde viven si las distancias forman un triángulo rectángulo?

Ver Solución

El diagrama del vecindario es un triángulo rectángulo de lados 40m, 50m y 30m inscrito en una circunferencia:



Nota: la distancia mayor debe ser necesariamente la hipotenusa del triángulo.

Al aplicar el teorema del seno a la fórmula del área de un triángulo se obtiene que ésta es

$$A = \frac{abc}{4R}$$

Primero, despejamos R en la fórmula:

$$R = \frac{abc}{4A}$$

Puesto que el diámetro es dos veces el radio, $D = 2R$, se tiene

$$\frac{D}{2} = \frac{abc}{4A} \rightarrow$$

$$D = \frac{abc}{2A}$$

Como disponemos de los valores de los lados *a*, *b* y *c*, para obtener el radio, *R*, sólo necesitamos calcular el área y sustituirla en la fórmula anterior.

Al ser el triángulo rectángulo, su base y su altura coinciden con sus dos catetos. Esto nos proporciona el área:

$$A = \frac{40 \cdot 30}{2}$$

$$= 600\, m^2$$

Para terminar, sustituimos todos los valores en la fórmula del diámetro que obtuvimos:

$$D = \frac{abc}{2A}$$

$$D = 2 \cdot \frac{50 \cdot 40 \cdot 30}{4 \cdot 600}$$

$$D = 50\, m$$

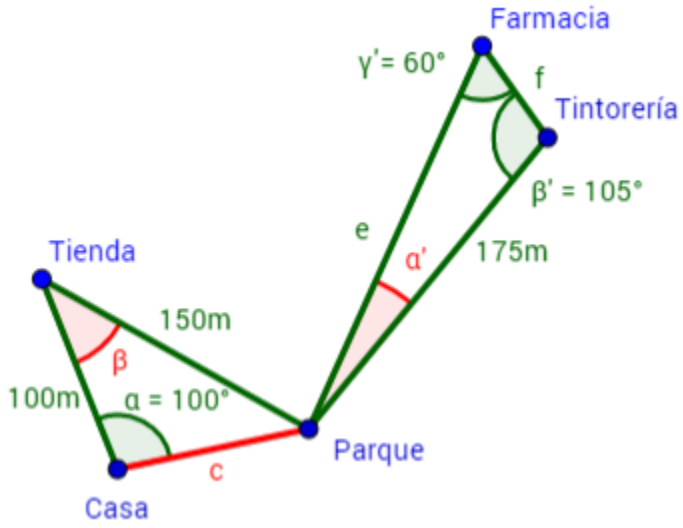
Luego el diámetro de la vecindad es de 50 metros.

Problema 6

Los lunes, miércoles y viernes, Alejandro hace un recorrido en el cual parte de su casa. Primero va a la tienda, luego a la tintorería y por último, a la farmacia para después regresar a

su casa. El recorrido empieza y termina en su casa y sólo pasa una vez por los otros tres lugares (elige el camino más corto).

Sabemos que hay un parque en medio de los cuatro lugares mencionados. De la casa a la tienda, hay una distancia de 100 metros; de la tienda al parque, 150 metros; y de la farmacia a la tintorería, 175 metros. Si los ángulos α, β' y γ' miden 100°, 105° y 60° respectivamente, ¿cuántos metros en total camina Alejandro a la semana?

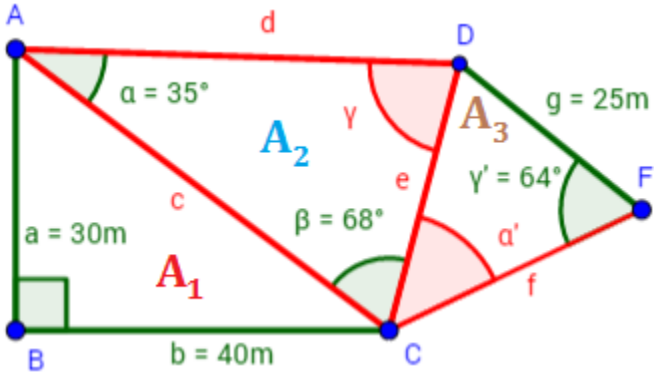


En la representación, las distancias no están a escala. Las medidas de los lados y de los ángulos de color rojo las desconocemos y las de color verde las conocemos.

Ver Solución

Problema 7

Se quiere construir un centro comercial con la siguiente forma:



Si sabemos que los lados *a*, *b* y *g* medirán 30 metros, 40 metros y 25 metros respectivamente, y los ángulos medirán α = 35°, β = 68° y γ'= 64°, ¿cuál será el área total del centro comercial?

Ver Solución

Debemos calcular el área de los tres triángulos para obtener el área total, es decir:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$

Puesto que el primer triángulo (el de vértices *A*, *B* y *C*) es rectángulo, su base, *b*, y su altura, *h*, coinciden con sus catetos. Luego su área es

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} =$$
$$A_1 = \frac{30 \cdot 40}{2} =$$
$$A_1 = 600\ m^2$$

Además, puesto que este triángulo es rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular su hipotenusa (lado *c*):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo los valores de *a* y *b* y calculando la raíz cuadrada, obtenemos *c*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{30^2 + 40^2}$$
$$c = \sqrt{900 + 1600}$$
$$c = \sqrt{2500}$$
$$c = 50\ m$$

Para calcular el área del segundo triángulo (el de vértices *A*, *D* y *C*), utilizaremos una de las fórmulas del área obtenida al aplicar el teorema del seno:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$$

Es decir, necesitamos conocer dos lados (por ejemplo, *c* y *d*) y el ángulo opuesto al otro lado (el ángulo opuesto al lado *e*, que es α):

$$A = \frac{c \cdot d \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

Conocemos el lado *c*, pero no el *d*. Tenemos que calcularlo:

Como conocemos los valores de dos de los ángulos (α y β), podemos calcular el ángulo γ porque sabemos que la suma de los tres ángulos debe ser 180º:

$$\gamma + \beta + \alpha = 180°$$
$$\gamma = 180° - 35° - 68°$$
$$\gamma = 77°$$

Ahora que conocemos todos los ángulos del segundo triángulo, podemos calcular el lado *d*. Para ello, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{d}{\sin(\beta)} \quad \rightarrow$$

$$d = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad \rightarrow$$

$$d = \frac{50 \cdot \sin(68°)}{\sin(77°)} \quad \rightarrow$$

$$d \cong 47.58\ m$$

Calculamos el área A_3:

$$A_2 = \frac{c \cdot d \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

$$A_2 = \frac{50 \cdot 47.58 \cdot \sin(35°)}{2}$$

$$A_2 \cong 682.27\ m^2$$

Finalmente, para calcular el área del último triangulo aplicaremos la misma fórmula. Necesitamos conocer dos lados (por ejemplo, *e* y *g*) y el ángulo opuesto al otro lado (el opuesto a *f*).

Primero debemos calcular el lado *e*. Aplicando el teorema del seno (en el segundo triángulo):

$$e = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \rightarrow$$

$$e = \frac{50 \cdot \sin\,(35°)}{\sin\,(77°)}$$

$$e \cong 29.43\ m$$

Como conocemos los lados *e* y *g* y el ángulo γ', podemos calcular el ángulo α':

Cuantos más decimales escribimos, más buena será la aproximación del ángulo:

$$\frac{e}{\sin(\gamma')} = \frac{g}{\sin(\alpha')} \rightarrow$$

$$\sin(\alpha') = \frac{25 \cdot \sin(64°)}{29.43}$$

$$\sin(\alpha') \cong 0.7635015683$$

Aplicando el arcoseno,

$$\alpha' = \arcsin(0.7635015683)$$

$$\alpha' = 49.77°$$

Ahora ya podemos calcular el ángulo β' (el tercer ángulo del tercer triángulo) puesto que conocemos los otros dos ángulos del triángulo:

$$\gamma' + \beta' + \alpha' = 180°$$

$$\beta' = 180° - 49.77° - 64°$$

$$\beta' = 66.23°$$

Calculamos el área del tercer triángulo:

$$A_3 = \frac{e \cdot g \cdot \sin(\beta')}{2}$$

$$A_3 = \frac{29.43 \cdot 25 \cdot \sin(66.23°)}{2}$$

$$A_3 \cong 336.67\ m^2$$

Para terminar, debemos sumar las tres áreas calculadas. Luego el área del centro comercial es

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_T = 600 + 682.27 + 336.67$$

$$A_T = 1618.94\ m^2$$

Teorema del seno o de los senos: demostración y problemas resueltos - (c) - matesfacil.com

---

Matesfacil.com by J. Llopis is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.